Algebra III - Abstraktna algebra, 13.06.2017.

1. Naj bo $S_{[0,1]}$ množica vseh bijekcij iz intervala $[0,1]$ na interval $[0,1]$.

(a) Pokaži, da je $S_{[0,1]}$ grupa glede na operacijo komponiranja preslikav.

(b) Naj bo $T = \{\alpha \in S_{[0,1]} \,|\, \alpha(0) = 0\}$. Pokaži, da je T podgrupa grupe $S_{[0,1]}$ (razloži tudi, zakaj je T neprazna množica).

(c) Pokaži, da je $\{\sigma \in S_{[0,1]} \,|\, \sigma(0) = 1\}$ levi odsek podgrupe T v grupi $S_{[0,1]}$.

(d) Določi $[S_{[0,1]} : T]$.

Re.
(a) $\circ$ je asocijativna binarna operacija, $\mathrm{id}(x) = x \ \forall x \in [0,1]$ je nevtralni element, za vsak element obstaja inverz.
(b) $\mathrm{id} \in T \Rightarrow T \neq \emptyset$;
$\forall \alpha, \beta \in T \ (\alpha\beta)(0) = 0$;
$\mathrm{id}(0) = 0 \Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha)(0) = 0 \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha(0)) = 0 \Rightarrow \alpha^{-1}(0) = 0 \Rightarrow \alpha^{-1} \in T$.
(c) Naj bo $f : [0,1] \Rightarrow [0,1]$ bijekcija t.d. $f(0) = 1$. Potem $fT \subseteq \{\sigma \in S_{[0,1]} \,|\, \sigma(0) = 1\}$ in $\{\sigma \in S_{[0,1]} \,|\, \sigma(0) = 1\} \subseteq fT$...
(d) $[S_{[0,1]} : T] = \infty$.

2. Konstruiraj Cayley-evo tabelo za alternirajoči grupi A_2 in A_3. Ali je $\mathbb{Z}_3 \cong A_3$? (Odgovor razloži.)

Re.
$|A_2| = \frac{2!}{2} = 1$, $A_2 = \{(1)\}$;
$|A_3| = \frac{3!}{2} = 3$, $A_3 = \{(1), (123), (132)\}$;

$\cdot$	(1)
(1)	(1)

$\cdot$	(1)	(123)	(132)
(1)	(1)	(123)	(132)
(123)	(123)	(132)	(1)
(132)	(132)	(1)	(123)

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\Rightarrow \mathbb{Z}_3 \cong A_3$.

3. Naj bo $\mathbb{R}^*$ grupa neničelnih realnih števil glede na operacijo množenja. Uporabi prvi izrek o izomorfizmu, in pokaži da je
$$\mathbb{R}^*/\langle -1 \rangle \cong \mathbb{R}^+.$$

Re. $\langle -1 \rangle = \{1, -1\}$, $\{x \in \mathbb{R}^* \, : \, |x| = 1\} = \{1, -1\}$.
Naj bo $\phi : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definiran s $x \longrightarrow |x|$. Potem je ϕ homomorfizem grup, $\ker(\phi) = \langle -1 \rangle$ in $\phi(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^+$...

4. Pokaži, da je vsaka abelska grupa reda 15 ciklična.

Re.
$|G| = 15 = 3 \cdot 5$,
Cauchijev izrek za abelske grupe $\Rightarrow \exists a, b \in G$, $a \neq e$, $b \neq e$, $|a| = 3$, $|b| = 5$...
Naj bo $c = ab$. Potem $|c| \notin \{1, 3, 5\}$...
$|c| = 15 \Rightarrow G = \langle c \rangle$.

Več na `http://osebje.famnit.upr.si/~penjic/`